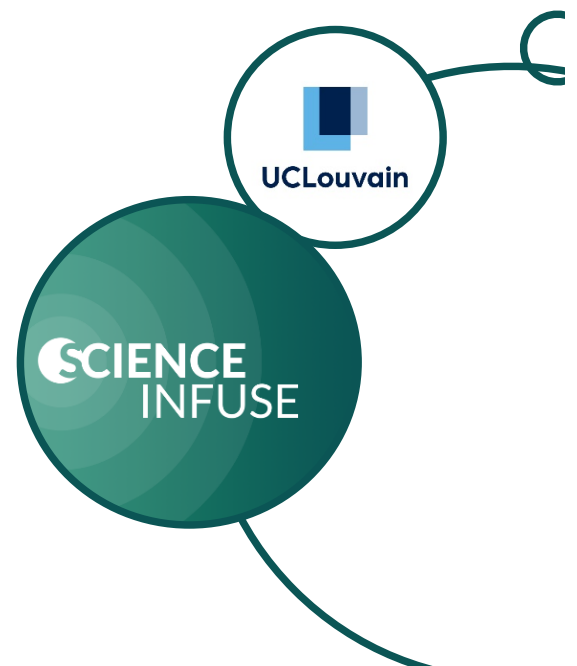
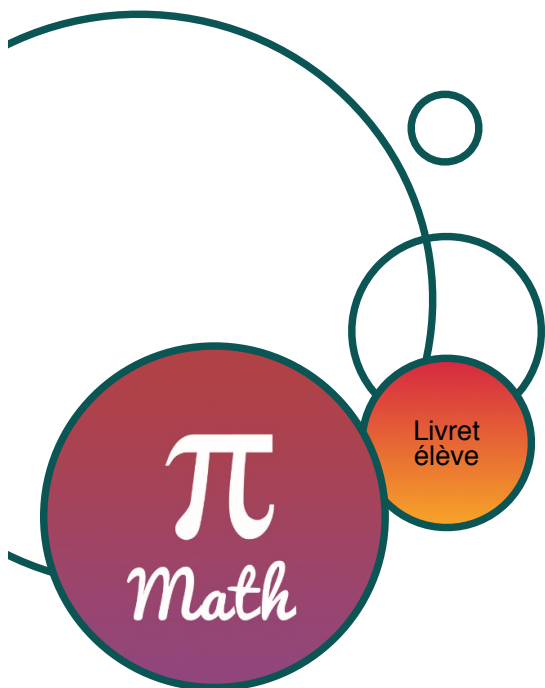
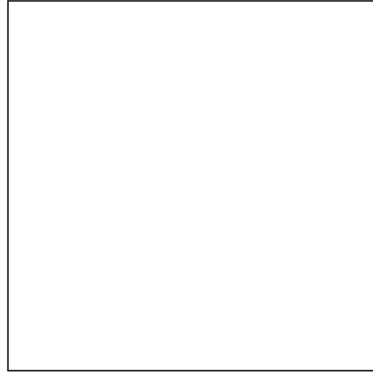


INTRODUCTION À LA NOTION DE DÉRIVÉE

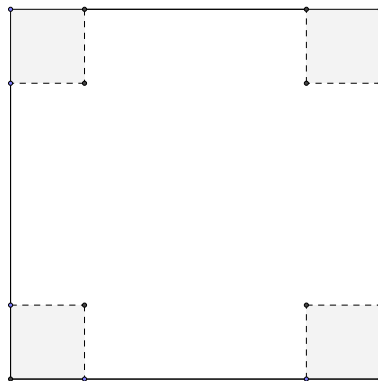


1 Enoncé du problème

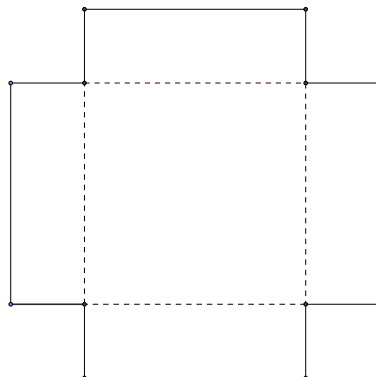
On vous demande de construire une boîte (sans couvercle) de volume le plus grand possible à partir d'une feuille cartonnée carrée de dimension $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$.



Pour former cette boîte, coupez quatre carrés de même dimension dans les quatre coins comme représenté ci-dessous.



Ensuite, pliez le long des pointillés et fermez la boîte ainsi obtenue avec quatre morceaux de papier collant.

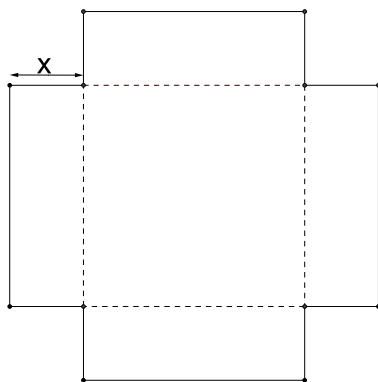


Après avoir essayé des découpes de différentes tailles, répondez aux questions ci-dessous :

1. Quelle est la longueur du côté des carrés que vous avez coupés ?
2. Quel est le volume de votre boîte ?
3. Comparez ensuite avec vos camarades : dans toute la classe, quelle est la longueur du côté des carrés que vous avez coupés qui a donné le plus grand volume ?

2 Modélisation du problème

Nous allons écrire la fonction du volume obtenu en fonction de la longueur du côté des carrés coupés. Notons x la longueur du côté des carrés coupés.



1. Quelle est la plus petite valeur de x que vous pourriez prendre ?
2. Quelle est la plus grande valeur de x que vous pourriez prendre ?
3. Quel est alors le domaine de définition de la fonction volume ?
4. Que vaut le volume de la boîte fabriquée en fonction de x ?
 $V(x) =$

5. Représentez le graphique de cette fonction V et marquez le point d'abscisse qui donne le plus grand volume. Nous allons noter ce point x_0 . Ce point est une solution approximative de notre problème mais nous aimerions avoir une solution plus précise.

3 Résolution du problème

Pour résoudre ce problème précisément, nous allons utiliser la tangente au graphique en x_0 .

3.1 Informations préliminaires

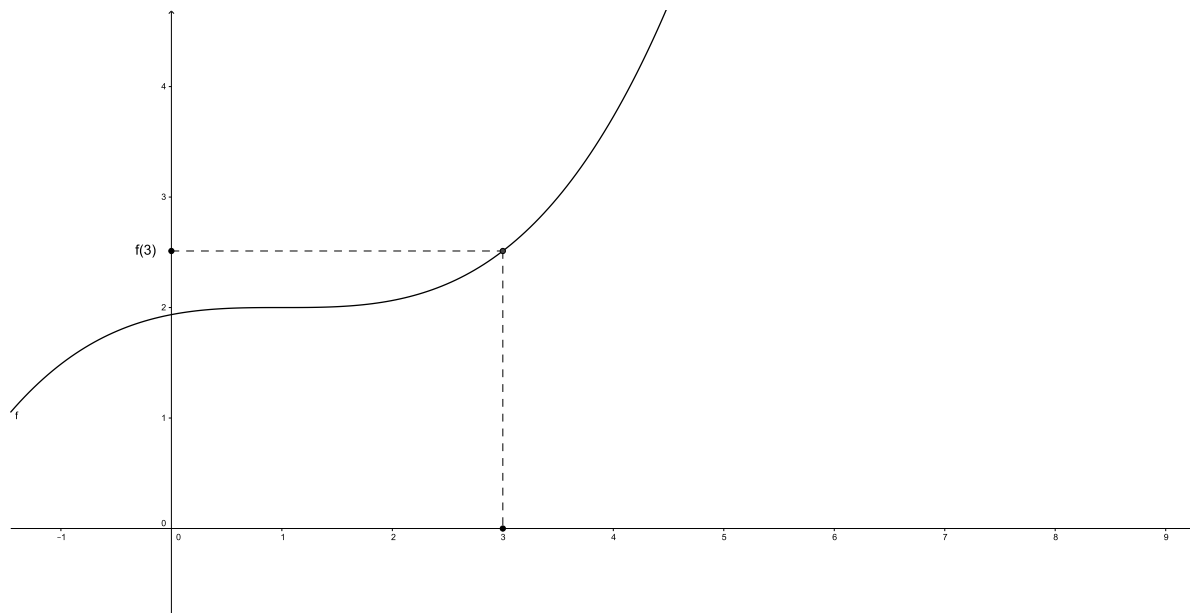
Voyons tout d'abord comment calculer le coefficient angulaire d'une droite tangente au graphe d'une fonction f en un point x_0 .

1. La tangente est une droite. Quelle est la forme de l'équation d'une droite ?
2. Qu'appelle-t-on le coefficient angulaire d'une droite ?
3. Donnez la formule pour calculer le coefficient angulaire de la droite passant par (x, y) et (x', y') .

4. Combien de points de la tangente avons-nous besoin pour trouver son coefficient angulaire ?

En connaissons-nous suffisamment dans notre cas ?

5. Considérons par exemple le graphe suivant



Tracez une droite proche de la tangente passant par $x_0 = 3$ et appelez x_1 l'abscisse de son second point d'intersection avec le graphe de la fonction. Quel est le coefficient angulaire de cette droite ?

6. Existe-il une droite passant par x_0 encore plus proche de la tangente que celle que vous avez tracée ? Si oui, tracez une telle droite et appelez x_2 l'abscisse de son second point d'intersection avec le graphe de la fonction. Quel est le coefficient angulaire de cette nouvelle droite ?

7. S'il existe une droite passant par x_0 encore plus proche de la tangente que la droite précédente, tracez-la, appelez x_3 l'abscisse de son second point d'intersection avec le graphe de la fonction et calculez-en le coefficient angulaire.

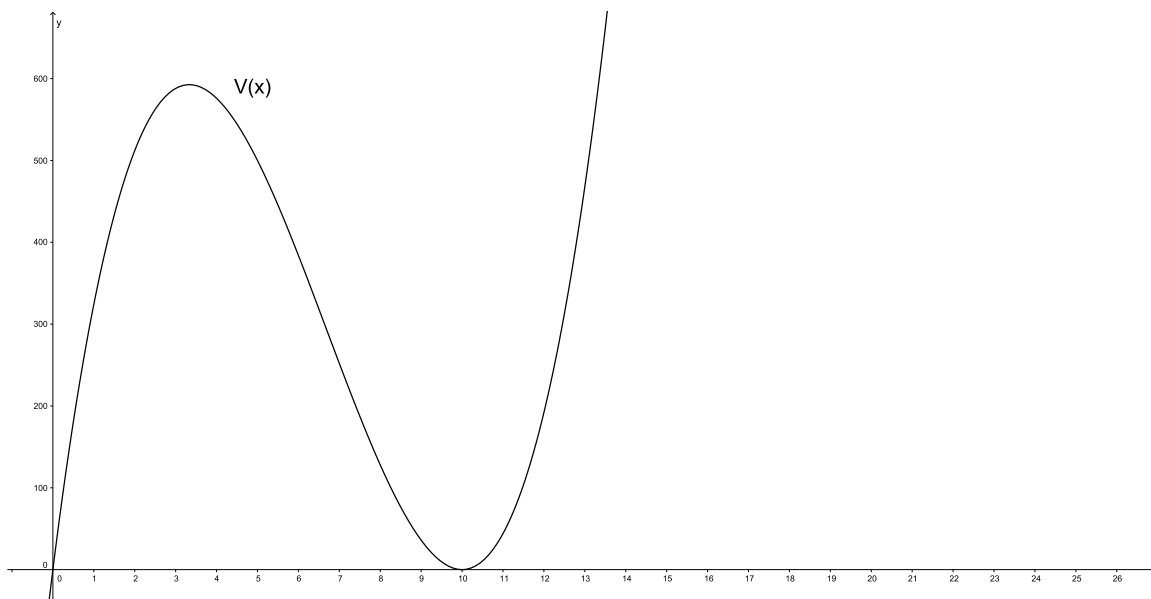
8. Pouvez-vous encore trouver d'autres droites plus proches de la tangente (et passant par x_0) que celles déjà tracées ?

9. Quel est selon vous le lien entre le coefficient angulaire de la tangente au point x_0 et ceux des droites que vous avez tracées ?

10. Pouvez-vous en déduire le coefficient angulaire de la tangente au point x_0 ?

3.2 Solution du problème

Revenons à la fonction $V(x)$ qui donne le volume de la boîte en fonction de la longueur x du côté des carrés coupés.



1. Sur le graphique de la fonction V , tracez la tangente au point x_0 . Qu'observez-vous ?

2. Quel est le coefficient angulaire de la tangente du graphique au point x_0 ?

3. Notez la formule obtenue dans les informations préliminaires pour le coefficient angulaire d'une tangente :

4. Dans le cas de la fonction V de notre problème, quelle est cette formule ?

5. Calculez cette limite.

6. En utilisant les points précédents, nous savons que x_0 doit être solution de l'équation :

7. Résolvez cette équation.

8. Combien de cm fallait-il couper pour avoir le plus grand volume ? Quel est ce volume ?