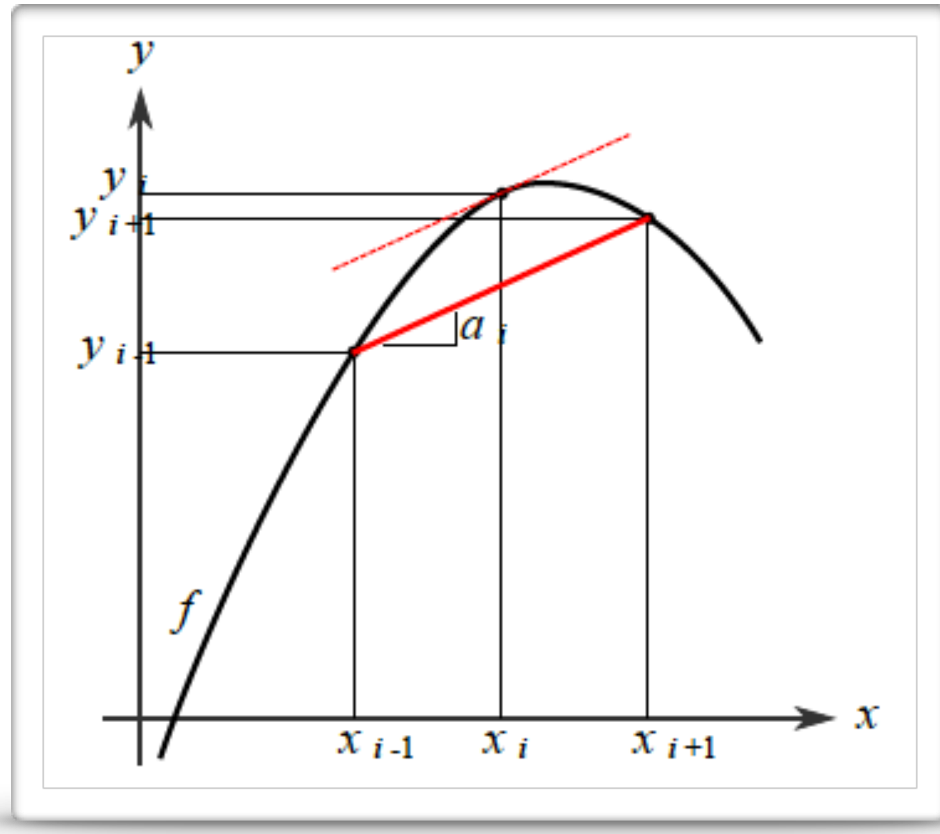


INTRODUCTION À LA NOTION DE DÉRIVÉE

Livret prof

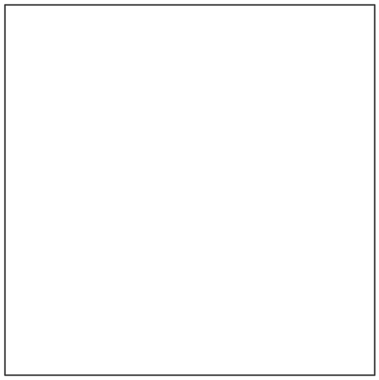
Math

UCLouvain

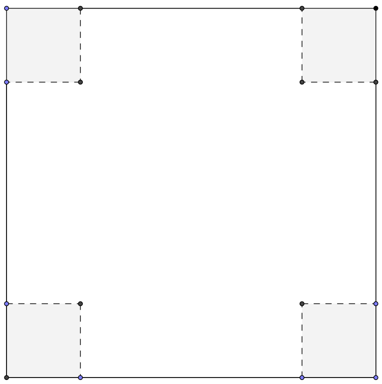
SCIENCE INFUSE

1 Enoncé du problème

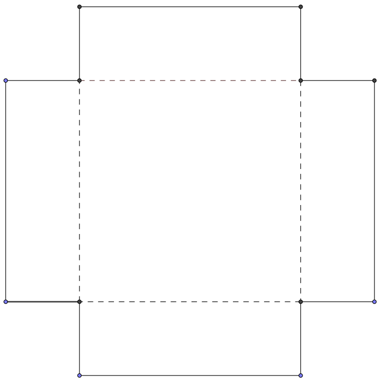
On vous demande de construire une boîte (sans couvercle) de volume le plus grand possible à partir d'une feuille cartonnée carrée de dimension 20 cm $\times$ 20 cm.



Pour former cette boîte, coupez quatre carrés de même dimension dans les quatres coins comme représenté ci-dessous.



Ensuite, pliez le long des pointillés et fermez la boîte ainsi obtenue avec quatre morceaux de papier collant.

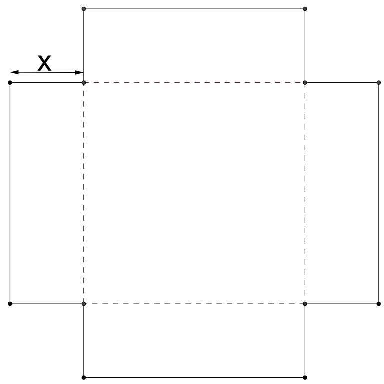


Après avoir essayé des découpes de différentes tailles, répondez aux questions ci-dessous :

1. Quelle est la longueur du côté des carrés que vous avez coupés ?
2. Quel est le volume de votre boîte ?
3. Comparez ensuite avec vos camarades : dans toute la classe, quelle est la longueur du côté des carrés que vous avez coupés qui a donné le plus grand volume ?

2 Modélisation du problème

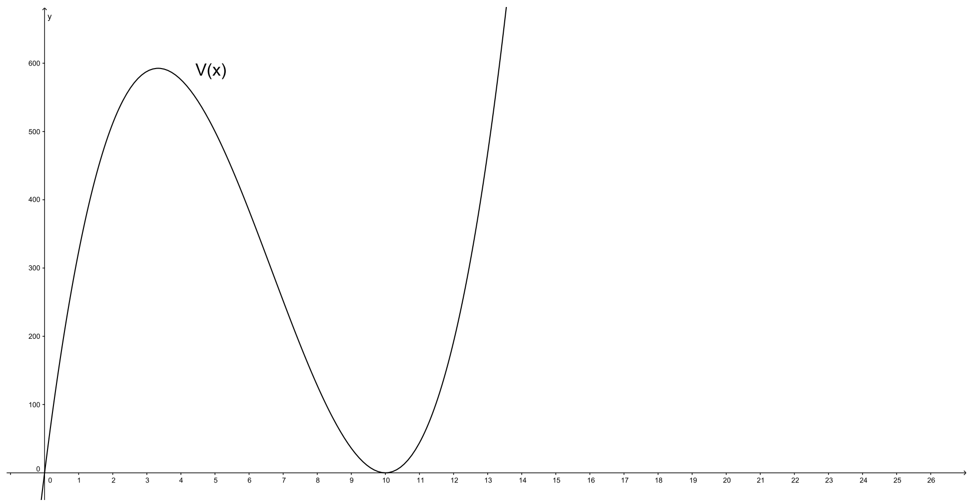
Nous allons écrire la fonction du volume obtenu en fonction de la longueur du côté des carrés coupés. Notons x la longueur du côté des carrés coupés.



1. Quelle est la plus petite valeur de x que vous pourriez prendre ?
   La plus petite valeur de x est $x = 0$.
   Dans ce cas, le volume est nul.
2. Quelle est la plus grande valeur de x que vous pourriez prendre ?
   La plus grande valeur de x est $x = 10$.
   Dans ce cas, le volume est nul.
3. Quel est alors le domaine de définition de la fonction volume ?
   Le domaine de définition de la fonction volume est $[0, 10]$.
4. Que vaut le volume de la boîte fabriquée en fonction de x ?

$$\begin{aligned} V(x) &= (20-2x)(20-2x)x \\ &= x(20-2x)^2 \\ &= 4x^3 - 80x^2 + 400x \end{aligned}$$

5. Représentez le graphique de cette fonction V.



Marquez le point d'abscisse qui donne le plus grand volume. Nous allons noter ce point x_0. Ce point est une solution approximative de notre problème mais nous aimerions avoir une solution plus précise.

3 Résolution du problème

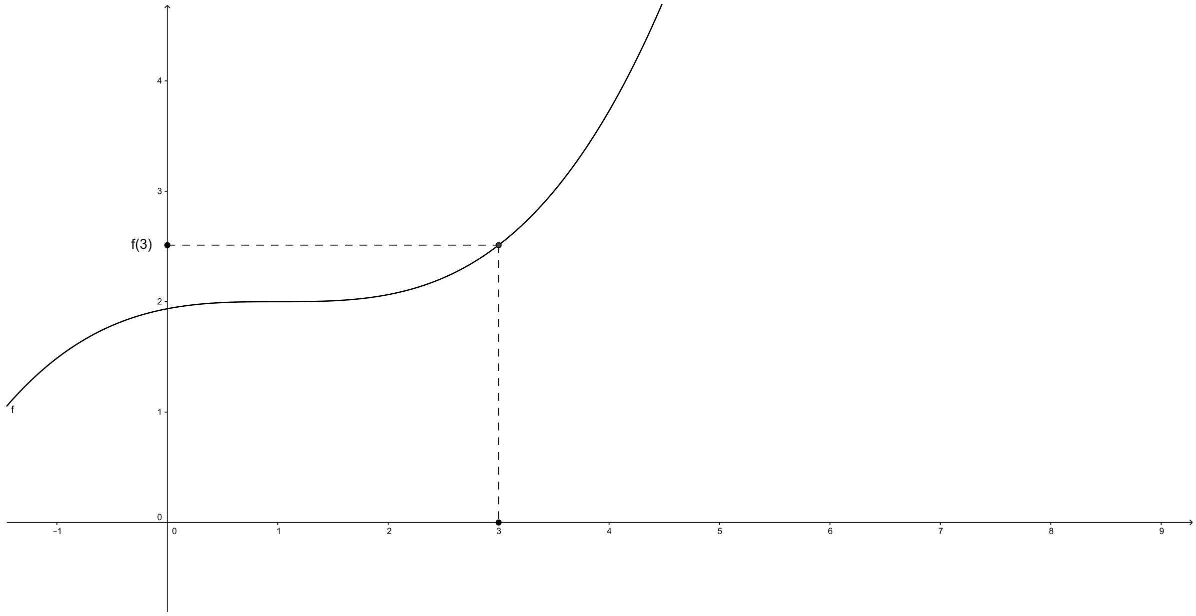
Pour résoudre ce problème précisément, nous allons utiliser la tangente au graphique en x_0.

3.1 Informations préliminaires

Voyons tout d'abord comment calculer le coefficient angulaire d'une droite tangente au graphe d'une fonction f en un point x_0.

1. La tangente est une droite. Quelle est la forme de l'équation d'une droite ?
   Une droite non verticale a pour équation $y = mx + p$.
   Le paramètre m représente la pente de la droite ou son coefficient angulaire (dans un repère orthonormé), le paramètre p représente l'ordonnée à l'origine de la droite.
2. Qu'appelle-t-on le coefficient angulaire d'une droite ?
   Dans un repère orthonormé, la pente ou coefficient angulaire d'une droite représente la variation en y correspondant à une variation de une unité en x.
3. Donnez la formule pour calculer le coefficient angulaire de la droite passant par (x, y) et (x', y').
   Le coefficient angulaire est donné par $\dfrac{y' - y}{x' - x}$.
4. Combien de points de la tangente avons-nous besoin pour trouver son coefficient angulaire ?
   2.
   En connaissons-nous suffisamment dans notre cas ? non, nous n'avons que le point x_0.

5. Considérons par exemple le graphe suivant



   Tracez une droite proche de la tangente passant par $x_0 = 3$ et appelez x_1 l'abscisse de son second point d'intersection avec le graphe de la fonction. Quel est le coefficient angulaire de cette droite ?

   Le coefficient angulaire est $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
6. Existe-il une droite passant par x_0 encore plus proche de la tangente que celle que vous avez tracée ? Si oui, tracez une telle droite et appelez x_2 l'abscisse de son second point d'intersection avec le graphe de la fonction. Quel est le coefficient angulaire de cette nouvelle droite ?

   Le coefficient angulaire est $\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$.
7. S'il existe une droite passant par x_0 encore plus proche de la tangente que la droite précédente, tracez-la, appelez x_3 l'abscisse de son second point d'intersection avec le graphe de la fonction et calculez-en le coefficient angulaire.

   Le coefficient angulaire est $\dfrac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$.
8. Pouvez-vous encore trouver d'autres droites plus proches de la tangente (et passant par x_0) que celles déjà tracées ?

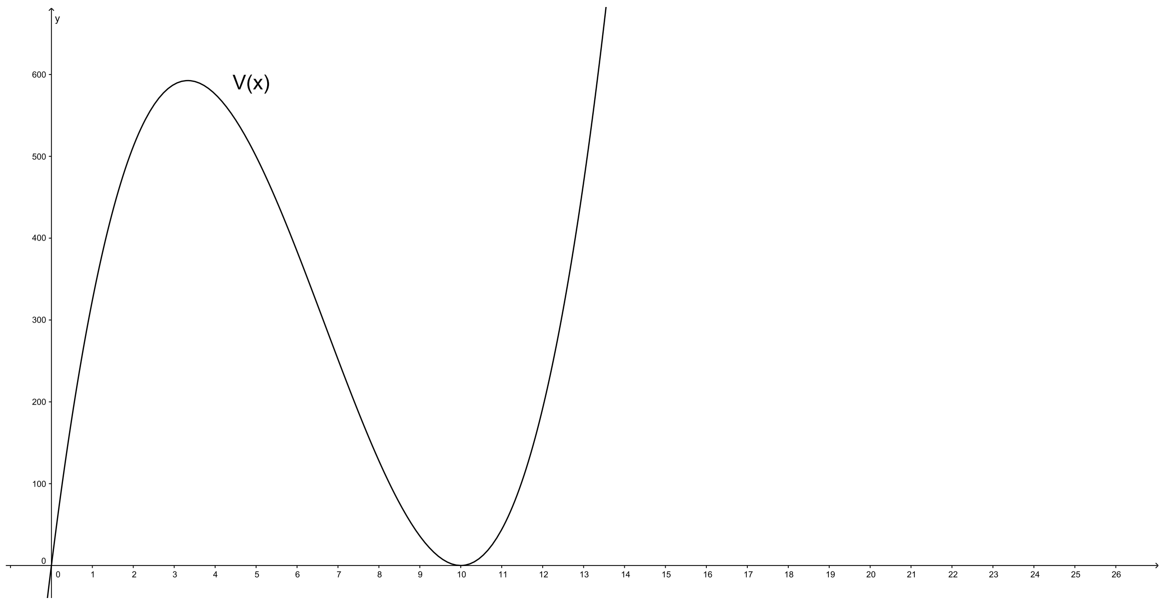
   Oui, en prenant des valeurs de x de plus en plus proches de x_0.
9. Quel est selon vous le lien entre le coefficient angulaire de la tangente au point x_0 et ceux des droites que vous avez tracées ?

   Le coefficient angulaire est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pour x tendant vers x_0.
10. Pouvez-vous en déduire le coefficient angulaire de la tangente au point x_0 ?

    Le coefficient angulaire de la tangente au point x_0 est $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

3.2 Solution du problème

Revenons à la fonction $V(x)$ qui donne le volume de la boîte en fonction de la longueur x du côté des carrés coupés.



1. Sur le graphique de la fonction V, tracez la tangente au point x_0. Qu'observez-vous ?
   La tangente au point x_0 est une droite horizontale.
2. Quel est le coefficient angulaire de la tangente du graphique au point x_0 ?
   Vu que la tangente au point x_0 est une droite horizontale, le coefficient angulaire de la tangente du graphique au point x_0 vaut 0. Pour résoudre notre problème précisément, nous cherchons donc un point x_0 tel que le coefficient angulaire de la tangente au graphique en x_0 vaut 0.
3. Notez la formule obtenue dans les informations préliminaires pour le coefficient angulaire d'une tangente :
   Le coefficient angulaire de la tangente à la fonction f au point x_0 est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
4. Dans le cas de la fonction V de notre problème, quelle est cette formule ?
   Le coefficient angulaire de la tangente à la fonction V au point x_0 est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0}$.
5. Calculez cette limite.
   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{4x^3-80x^2+400x-(4x_0^3-80x_0^2+400x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{4(x^3-x_0^3)-80(x^2-x_0^2)+400(x-x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(4(x^2+x_0x+x_0^2)-80(x+x_0)+400)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0} 4x^2+4x_0x+4x_0^2-80x-80x_0+400\\
&= 4x_0^2+4x_0x_0+4x_0^2-80x_0-80x_0+400\\
&= 12x_0^2-160x_0+400
\end{aligned}$$

6. En utilisant les points précédents, nous savons que x_0 doit être solution de l'équation :

$$12x^2 - 160x + 400 = 0.$$

7. Résolvez cette équation.
Cette équation peut se récrire $3x^2 - 40x + 100 = 0$. On calcule $\Delta = 1600 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 1600 - 1200 = 400$ et donc $x = \frac{40+20}{6} = 10$ ou $x = \frac{40-20}{6} = \frac{10}{3}$.
8. Combien de cm fallait-il couper pour avoir le plus grand volume ? Quel est ce volume ?
Si $x = 10$ alors le volume est nul. Le volume sera donc maximal pour $x = \frac{10}{3}$. Il faut donc couper $\frac{10}{3}$ cm pour obtenir la boîte de plus grand volume. Le volume maximal sera

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 80 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 400 \cdot \left(\frac{10}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1000}{27} - 80 \cdot \frac{100}{9} + 400 \cdot \frac{10}{3} = \frac{16000}{27} \text{ cm}^3.$$